PELABELAN HARMONIS GABUNGAN GRAF TANGGA SEGITIGA LS_n, DENGAN GRAF TANGGA SEGITIGA VARIASI X_n

Kurniawan

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi Informasi, Institut Sains dan Teknologi Nasional
Email kurniawan_atmadja@istn.ac.id

Naskah diterima tanggal 6 Maret 2019

ABSTRACT

*Graph G (V, E) or written G, consists of a non-empty set of vertices V and a set of arc E. In this paper the construction of labeling graphs is constructed 〖LSX〗 _n which is a graph of the combination of ladder graph 〖LS〗 _n with ladder X_n. The construction is built by placing 〖LS〗 _n then X_n intermittently and so on. The labeling result on the graph 〖LSX〗 _n is obtained by a harmonic graph as 〖LS〗 _n and X_n. Harmonious labeling is according to the definition of Graham and Sloane (1980), namely injective function f ^ *: V (G) ⟶Z_E, where f ^ * (xy) = f (x) + f (y) (mod | E |). Graph 〖LSX〗 _n, n> 2 that has been labeled, proven to be a harmonic graph.*

Keywords: *L_n ladder graph, triangular ladder graph 〖LS〗 _n, variation triangle X_n ladder graph, graph labeling, harmonic graph*

ABSTRAK

Graf $G(V,E)$ atau ditulis G, terdiri dari himpunan tak kosong simpul V dan himpunan busur E. Pada tulisan ini dibangun konstruksi pelabelan graf LSX_n yaitu sebuah graf hasil kombinasi gabungan graf tangga LS_n dengan graf tangga X_n. Konstruksinya dibangun dengan meletakan LS_n kemudian X_n secara berselang-seling dan seterusnya. Hasil pelabelannya pada graf ditulis graf LSX_n didapatkan sebuah graf harmonis sebagaimana graf LS_n dan X_n. Pelabelan harmonis sesuai definisi Graham dan Sloane (1980)[5] yaitu fungsi injektif $f^*: V(G) \longrightarrow \mathbb{Z}_E$, dimana $f^*(xy) = f(x) + f(y)(mod\ |E|)$.Graf $LSX_n, n > 2$ yang telah diberi label, dibuktikan adalah sebuah sebuah graf harmonis.

Kata kunci : *graf tangga L_n, graf tangga segitiga LS_n, graf tangga segitiga variasi X_n, pelabelan graf, graf harmonis.*

PENDAHULUAN

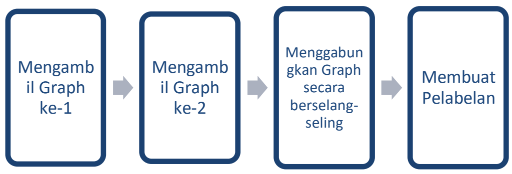
Pada tulisan ini ditampilkan penelitian gabungan dua graf tangga segitiga LS_n dan graf tangga segitiga variasi X_n . Graf X_n adalah graf harmonis[2]. Begitupun Graf LS_n adalah graf harmonis[3]. Graf tangga segitiga LS_n dan graf tangga segitiga variasi X_n diletakan secara bergantian berselang seling. Konstruksi pelabelannya dibangun dengan memberi bobot pada simpul dan busur pada hasil konstruksi kedua graf yang digabungkan itu. Hasil pelabelannya didapat sebuah graf gabungan harmonis. Pada penelitian ini, hasil gabungan grafnya ditulis $\boldsymbol{LSX_n}$

TINJAUAN PUSTAKA

Misal $G = (V, E)$, atau dapat disingkat G adalah graf yang terdiri dari himpunan simpul tak kosong V dan himpunan busur E. Banyak simpul V diberi notasi $|V|$ dan banyak busur E dinotasikan $|E|$. Syarat Graf G mempunyai pelabelan harmonis bila dipenuhi $|E| \geq |V|$. Pelabelan harmonis pertama kali diperkenalkan oleh Graham dan Sloane[5], berawal dari masalah error correcting code [4]. Lebih lengkapnya dapat dilihat pada hasil survey di gallian survey [4]. Pelabelan harmonis adalah suatu pemetaan yang mendefenisikan pemetaan injektif dari $V(G)$ ke $\mathbb{Z}_{|E|}$ sedemikian sehingga ketika setiap busur xy diberi label $f^* = f(x) + f(y)$.

METODOLOGI PENELITIAN

Dalam penelitian ini langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut :

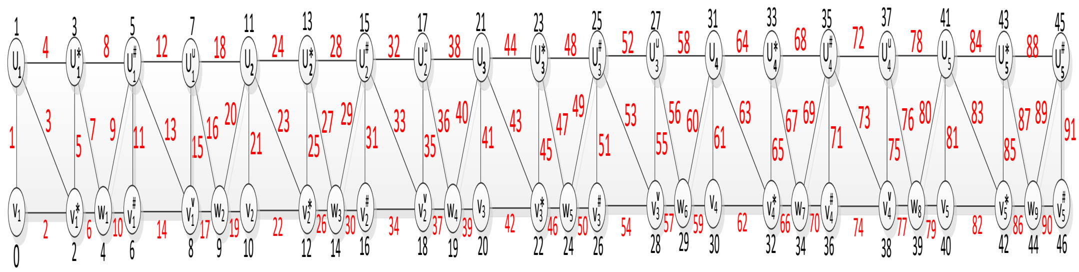


Gambar.1 Langkah-Langkah Penelitian

Keterangan Gambar di atas sebagai berikut:

1. Mengambil Grahp Pertama LS_n Mengambil Graph tangga segitiga dari literature studi yang berkaitan dalam hal ini mengambil data dari Prosiding di ITS pada tahun 2014
2. Mengambil Graph Kedua X_n
3. Menggabungkan Graph secara berselang-seling
4. Membuat Pelabelan

HASIL DAN PEMBAHASAN



Gambar.2 Graf LSX_n

Jumlah simpul dan busur .

Graf gabungan $(LS_n \cup X_n)$ dengan jumlah simpul $|V| = p$, dan jumlah busur $|E| = q$ mengikuti formula sebagai berikut :

$$|V| = p = \begin{cases} \frac{5n-1}{2} & \text{jika } n \in ganjil \\ \frac{5n-2}{2} & \text{jika } n \in genap. \end{cases},$$

dan

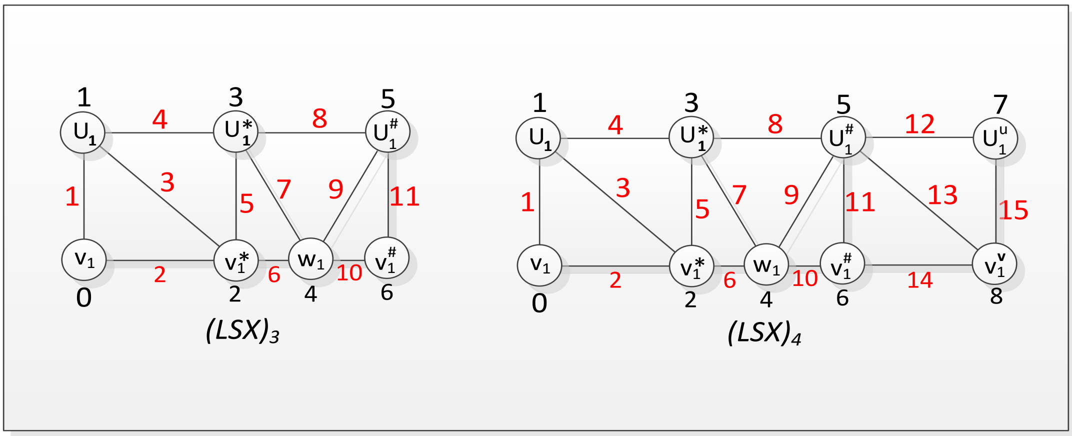
$$|E| = q = \begin{cases} (5n-4) & \text{jika } n \in ganjil \\ (5n-5) & \text{jika } n \in genap. \end{cases}$$

Hasil konstruksi gabungan pelabelan graf yang dibangun diberi simbol $(LSX)_n,\ n > 2$.
Gambar di atas adalah kontstruksi pelabelan graf $(LSX)_n,\ n = 19,\ p = 47$.

Graf $(LSX)_n,\ n > 2$ dibangun dari dua graf tangga yang berbeda (LS_n & X_n), formula label simpul dan busur sesuai bilangan n yang diambil (ganjil atau genap). Sebutan graf $(LSX)_n,\ n > 2$ diberi nama **graf tangga ganjil genap** atau graf gabungan ditulis $\boldsymbol{LSX_n}$
Contoh untuk $n = 3$ ($ganjil$) dan $n = 4$ ($genap$), maka p dan q dari graf $(LSX)_n$, $n > 2$ dapat ditentukan sesuai formula di atas sebagai berikut **:**

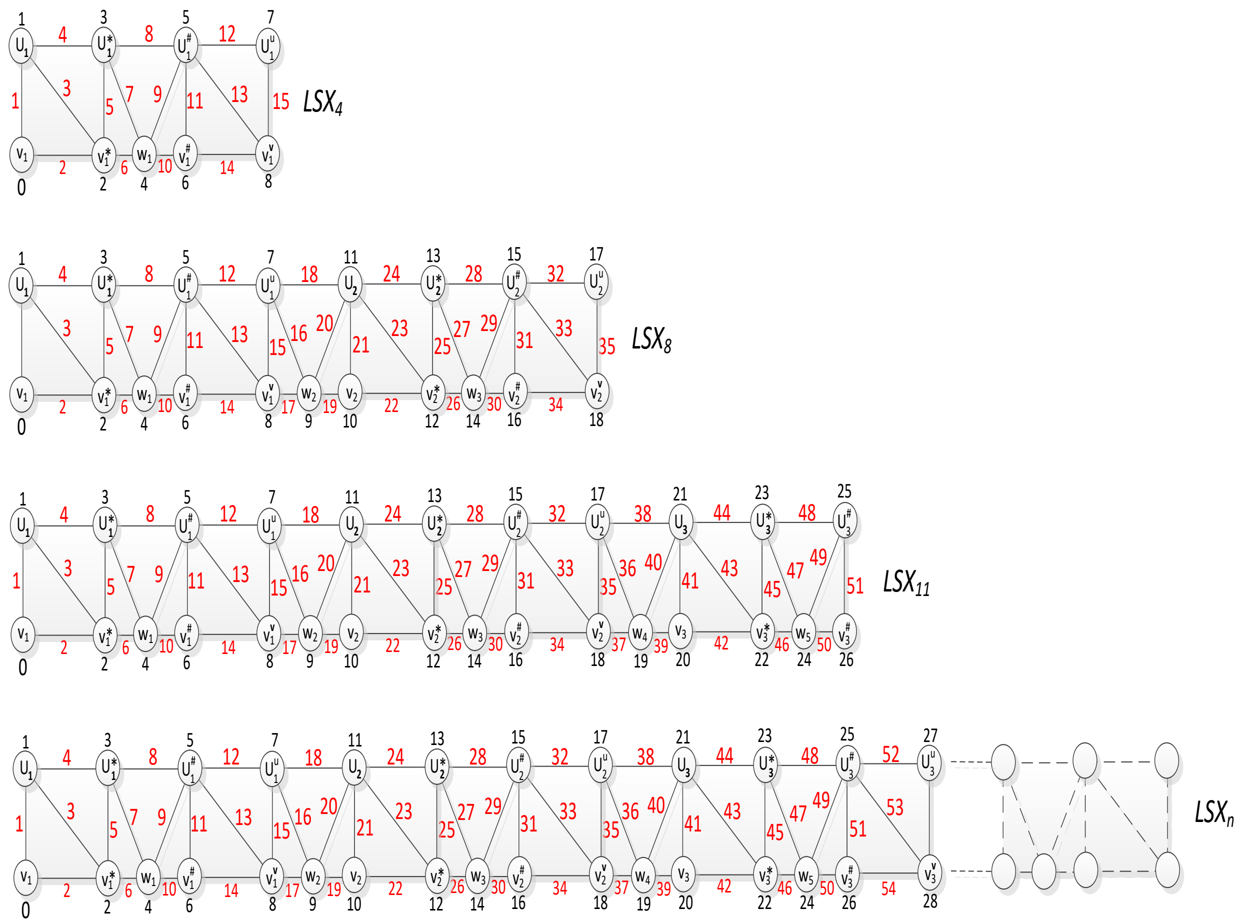
$(LSX)_3$, maka $p = 7$ dan $q = 11$.
$(LSX)_4$, maka $p = 9$ dan $q = 15$.

Diberikan Gambar.3 sebagai berikut :



Gambar .3 Konstruksi LSX3 dan LSX4

Dengan cara yang sama untuk $n > 4$ dapat dipahami dan didapatkan konstruksi graf $(LSX)_n$. Pada gambar 1 diberikan konstruksi bangunan graf LSX_n untuk $n = 1,2,3, \ldots$



Gambar 4. Konstruksi pelabelan graf tangga gabungan LSX_n

Didefinisikan variabel titik simpul graf LSX_n : $\boldsymbol{u_i}$, $\boldsymbol{u_i^*}$, $\boldsymbol{u_i^\#}$, $\boldsymbol{u_i^u}$, dan $\boldsymbol{v_i}$, $\boldsymbol{v_i^*}$, $\boldsymbol{v_i^\#}$, $\boldsymbol{v_i^v}$, $\boldsymbol{w_i}$.
Rumus fungsi simpulnya masing-masing sebagai berikut adalah **:**

$f(u_i) = 10i - 9$; $f(v_i) =$ 10i − 10 ; dimana $i = 1,2, \dots, n$
$f(u_i^*) = 10i - 7$; $f(v_i^*) =$ 10i − 8 ; dimana $i = 1,2, \dots, n$
$f(u_i^\#) = 10i - 5$; $f(v_i^\#) =$ 10i − 4 ; dimana $i = 1,2, \dots, n$
$f(u_i^u) = 10i - 3$; $f(v_i^v) =$ 10i − 2 ; dimana $i = 1,2, \dots, n$
$f(w_i) = 5i - 1$; $i = 1,2,3 \dots n$

Pelabelan f menginduksi pelabelan busur yang meliputi **:**

Perumusan label busur horizontal (atas) :

$f(u_i u_i^*) = f(u_i) + f(u_i^*) = (10i - 9) + (10i - 7) = 20i - 16$ ....(1)
$f(u_i^* u_i^\#) = f(u_i^*) + f(u_i^\#) = (10i - 7) + (10i - 5) = 20i - 12$ ....(2)
$f(u_i^\# u_i^u) = f(u_i^\#) + f(u_i^u) = (10i - 5) + 10i - 3 = 20i - 8$ .... (3)
$f(u_i^u u_{i+1}) = f(u_i^u) + f(u_{i+1}) = (10i - 3) + (10(i + 1) - 9) = 20i - 2$ ..(4)

Perumusan label busur horizontal (bawah) :

$f(v_i v_i^*) = f(v_i) + f(v_i^*) = (10i - 10) + (10i - 8) = 20i - 18$.................(5)
$f(v_i^* w_{2i-1}) = f(v_i^*) + f(w_{2i-1}) = (10i - 8) + (5(2i - 1) - 1) = 20i - 14$.(6)
$f(w_{2i-1} v_i^{\#}) = f(w_{2i-1}) + f(v_i^{\#}) = (5(2i - 1) - 1) + 10i - 4 = 20i - 10$...(7)
$f(v_i^{\#} v_i^{v}) = f(v_i^{\#}) + f(v_i^{v}) = (10i - 4) + (10i - 2) = 20i - 6$ ....(8)
$f(v_i^{v} w_{2i}) = f(v_i^{v}) + f(w_{2i}) = (10i - 2) + (5(2i) - 1) = 20i - 3$ ....(9)
$f(w_{2i} v_{i+1}) = f(w_{2i}) + f(v_{i+1}) = (5(2i) - 1) + (10(i + 1) - 10) = 20i - 1$ ... ... (10)

Perumusan fungsi label pada busur miring **:**

$f(u_i^* w_{2i-1}) = f(u_i^*) + f(w_{2i-1}) = (10i - 7) + 5(2i - 1) - 1 = 20i - 13$..(11)
$f(u_i^{\#} w_{2i-1}) = f(u_i^{\#}) + f(w_{2i-1}) = (10i - 5) + 5(2i - 1) - 1 = 20i - 11$..(12)
$f(u_i^{u} w_{2i}) = f(u_i^{u}) + f(w_{2i}) = (10i - 3) + 5(2i) - 1 = 20i - 4$ ....(13)
$f(u_{i+1} w_{2i}) = f(u_{i+1}) + f(w_{2i}) = (10(i + 1) - 9) + 5(2i) - 1 = 20i$ ....(14)
$f(u_i v_i^*) = f(u_i) + f(v_i^*) = (10i - 9) + (10i - 8) = 20i - 17$ ....(15)

Peruumusan fungsi label pada busur vertikal **:**

$f(u_i v_i) = f(u_i) + f(v_i) = (10i - 9) + (10i - 10) = 20i - 19$ ……(16)
$f(u_i^* v_i^*) = f(u_i^*) + f(v_i^*) = (10i - 7) + (10i - 8) = 20i - 15$ ....(17)
$f(u_i^{\#} v_i^{\#}) = f(u_i^{\#}) + f(v_i^{\#}) = (10i - 5) + (10i - 4) = 20i - 9$ ....(18)
$f(u_i^{u} v_i^{v}) = f(u_i^{u}) + f(v_i^{v}) = (10i - 3) + (10i - 2) = 20i - 5$ ....(19)

Dapat dilihat bahwa pelabelan simpul (verteks) dan busur (edge) yang diperoleh adalah beda sehingga konstrusi pelabelan graf tangga ganijl genap atau graf gabungan $(LSX)_n$ adalah pelabelan harmonis.

Maka konnstruksi graf tangga ganjil genap $(LSX)_n$ yang didapat adalah sebuah graf harmonis.

PENUTUP

Hasil penelitian Konstruksi pelabelan gabungan graf dengan sebutan graf tangga ganjil genap atau graf gabungan $\boldsymbol{LSX_n}$ mengikuti kaidah kaidah definisi pelabelan graf harmonis. Konstrusi pelabelannya memenuhi sebuah pemetaan injektif yakni $f^* = f(x) + f(y)$ menghasilkan lebel busur yang berbeda.

Kesimpulan

Graf LSX_n sebuah graf hasil gabungan merupakan graf harmonis.

Saran

Sangat dimungkinkan untuk dianalisa dan diteliti mengeksplorasi kembali terhadap dua graf lain yang masing masing keduanya graf harmonis.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Asih,A.J., Silaban, D.R., Sugeng, K.A., *Pelabelan Harmonis pada Graf Firecracker, Graf Hairy Cycle dan Graf Korona*, Prosiding Seminar Nasional 2010, Departemen Matematika FMIPA UI, 87-90(2010).

[2] Kurniawan A., Kiki A Sugeng Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga Segitiga variasi X_n , Prosiding SNM 2017, FMIPA UI Depok.

[3] Atmadja, K., Sugeng, K.A., Yuniarko, T. *Pelabelan Harmonis pada Graf Tangga Segitiga*, Prosiding Konferensi Nasional Matematika XVII-2014, ITS, Surabaya(2014).

[4] Gallian, J.A., *Dynamic Survey of Graph Labeling*, The Electronic Journal of Combinatorics, 16#DS6(2016).

[5] Graham, R.L. dan Sloan, N.J., *On Additive Bases and Harmonious Graphs*, SIAM J. Alg. Discrete Math. Vol 1, No 3, 382-404(1980).