

PENCOCOKAN KURVA DENGAN FUNGSI LINIER BAGIAN DEMI BAGIAN

CURVE FITTING WITH PIECEWISE LINEAR FUNCTIONS

Teguh Yuniarko

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Informasi,
 Institut Sains dan Teknologi Nasional,
 Jl. Moh. Kahfi II, Bhumi Srengseng Indah, Jagakarsa, Jakarta Selatan 12640
 Telp. (021) 7874647, Fax. (021) 7866955
 teguhyuniarko@istn.ac.id

ABSTRAK

Banyak data yang cocok dimodelkan dengan fungsi berupa potongan-potongan garis yang disebut fungsi linier bagian demi bagian (piecewise-linear). Fungsi penghalusan ini berkaitan dengan hiperbola yang mempunyai potongan-potongan linier sebagai bentuk hampiran yang secara khusus berguna untuk merespon kurva yang bersifat asimptotis. Keuntungan dari fungsi ini adalah memiliki sifat turunan yang continue pada setiap orde dan mudah dianalisis. Bentuk umum dari fungsi ini adalah berupa penjumlahan suku-suku aljabar yang lebih sederhana tapi dapat mewakili model permasalahan yang lebih kompleks.

Kata kunci : fungsi penghalusan kurva, fungsi linier

ABSTRACT

A lot of suitable data is modeled by functions in the form of pieces of lines called piecewise-linear linear functions. This refinement function is related to hyperbole which has linear pieces as a form of approximation which is specifically useful for responding to asymptotic curves. The advantage of this function is that it has inheritance properties that continue at each order and are easy to analyze. The general form of this function is the sum of algebraic terms that are simpler but can represent more complex problem models.

Keywords : curve fitting, linear function.

1. PENDAHULUAN

Data percobaan seringkali dituangkan kedalam bentuk terpakai dengan pencocokan kuadrat terkecil dari sebuah fungsi yang memiliki sifat yang cocok. Sebuah bentuk fungsional dengan batasan (*constrain*) yang diketahui dioperasikan dalam suatu sistem percobaan yang diberikan, tapi didalam sistem yang kompleks seperti sistem biologi, fungsi berbentuk polynomial biasa dipakai. Kelas dari fungsi memang tidak diketahui, tapi kesesuaian untuk macam-macam data terapan acapkalai disertakan. Fungsi ini memiliki turunan yang continue disemua orde, yaitu berupa kurva penghalusan dengan pendekatan fungsi linier bagian demi bagian (*piecewise-linear*) didalam sebuah limit yang mendekati nol atau tak hingga.

Fungsi terdiri dari potongan-potongan garis disebut '*piecewise-linier*' (Nilsson, 1968). Fungsi piecewise-linear continue pada selang yang tertentu tapi mempunyai limit berhingga pada titik titik discontinue dari turunan pertama dimana potongan garis bertemu. Berbagai sistem fisis dapat dimodelkan dengan baik dengan fungsi piecewise-linear yang asimptotis terhadap data actual dari

sistem yang ditentukan oleh solusi dari persamaan yang muncul.

Salah satu tipe khusus dari fungsi piecewise-linear adalah '*linear-response-and plateau*' (LRP) model yang didasri oleh hukum minimum Liebig (Dillon 1977). Didalam model ini respon meningkat secara linier kebeberapa nilai variable bebas dan kemudian sisa konstanta merupakan variable bebas yang meningkat lebih jauh.

1. BENTUK UMUM SECARA MATEMATIS

Persamaan umum tunggal yang mencocokkan dua tipe kondisi syarat batas akan dijelaskan sebagai berikut.

Kondisi syarat batas pertama adalah

$$y = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{2.1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y' = a, \tag{2.2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y' = b \tag{2.3}$$

dimana a adalah slope dari asimptot untuk $x \rightarrow \infty$, dan b adalah slope dari asimptot untuk $x \rightarrow -\infty$. Kondisi syarat batas kedua adalah

$$z = g(x), \quad 0 \leq x < \infty \tag{2.4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} z' = c \tag{2.5}$$

$$z'(0) = d \tag{2.6}$$

dimana c adalah slope dari asimptot untuk $x \rightarrow \infty$, dan d adalah slope dari fungsi z pada $x = 0$.

Untuk salah satu y atau z , fungsi piecewise-linear mewakili perilaku asimptotis bisa mempunyai sejumlah berhingga potongan garis. Bentuk umum untuk y dan z adalah,

$$\left. \begin{matrix} y \\ \text{atau} \\ z \end{matrix} \right\} = a_0 + a_1x + \sum_{i=1}^n b_i(|x - x_i|^{c_i} + d_i)^{1/c_i} \tag{2.7}$$

Dimana $n + 1$ adalah jumlah potongan piecewise-linear, dan a_0, a_1, b_i, c_i, d_i , dan x_i adalah parameter dengan $1 \leq c_i$. Persamaan (2.7) adalah terkait dengan hiperbola yang dapat dilihat dengan memisalkan $a_0 = 0, a_1 = 0, b_i = 1, c_i = 2, d_i = 1, x_i = 0$, dan $n = 1$ yang menghasilkan

$$y = (|x|^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \tag{2.8}$$

atau

$$y^2 - x^2 = 1 \tag{2.9}$$

yaitu hiperbola dengan focus $(0, \sqrt{2})$ dan $(0, -\sqrt{2})$ dan direktris $y = 1/\sqrt{2}$ dan $y = -1/\sqrt{2}$. Parameter pada persamaan (2.7) adalah secara umum tidak sama seperti slope yang didesain oleh huruf yang sama didalam persamaan (2.1) dan (2.6).

$$y = 1 + a_1x + b_1 \left\{ \left(\frac{a_1}{b_1} \right)^{c_1} + 1 \right\}^{1/c_1} + b_2 (x^{c_2} + 1)^{1/c_2} \tag{3.5}$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Fungsi

$$y = 1 + x - (x^c + 1)^{1/c}, \quad 0 \leq x \leq \infty \tag{3.1}$$

merupakan bentuk (2.7), dan didalam limit $c \rightarrow \infty$. Persamaan (3.1) menjadi asimptotis terhadap fungsi LRP

$$b_1 = \frac{b(a_1 - 1)}{b - 1} \tag{3.6}$$

$$y = \begin{cases} x, & \text{untuk } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{untuk } x > 1 \end{cases}$$

(3.2)

Gambar 1 adalah plot dari persamaan (3.1) dengan variasi nilai c . Gambar 2 merupakan plot dari fungsi

$$y = 1 + a \left[(x-b) - ((x-b)^2 + d)^{\frac{1}{2}} \right], \quad 0 < x < \infty \tag{3.3}$$

dimana,

$$a = 1 / \left[1 + (1-d)^{\frac{1}{2}} \right]$$

dan

$$b = (1 - d)^{\frac{1}{2}}$$

untuk berbagai nilai d . Persamaan (3.3) seperti (3.1), menjadi asimptotis terhadap fungsi LRP dari (3.2) dan juga bentuk (2.7). Perbedaan antara (3.1) dan (3.3) adalah pada (3.1) parameter d ditetapkan sama dengan 1, ketika didalam persamaan (3.3) parameter c pada (2.7) ditetapkan sama dengan 2. Perbandingan Gambar 1 dengan Gambar 2 menunjukkan bahwa keluarga kurva yang dihasilkan (3.1) dan (3.3) menjadi sangat similar.

Persamaan Mitscherlich dari bentuk

$$y = 1 - e^{-x} \tag{3.4}$$

memiliki dua sifat umum yang penting dengan persamaan (3.1) ke (3.3). Pertama mempunyai slope 1 pada $x = 0$. Kedua asimptotis terhadap $y = 1$ pada $x \rightarrow \infty$. Anggota tertentu dari keluarga kurva yang dibangun oleh (3.1) dan (3.3), faktanya merupakan hampiran yang baik terhadap persamaan Mitscherlich (3.4). Gambar 3 mengilustrasikan kedekatan dari dua hampiran, perbedaan antara (3.1) dengan $c = 2,6$ dan persamaan Mitscherlich (3.4) dengan jelas tergambar, seperti perbedaan antara (3.3) dengan $d = 0,6$ dan (3.4). Kurva pada Gambar 3 memperlihatkan hampiran yang baik terhadap persamaan Mitscherlich didapat dengan (3.1) atau (3.3), tapi persamaan selain itu dapat dibuat identik terhadap persamaan Mitscherlich. Perpotongan dua garis didalam Gambar3.

Dalam percobaan dengan presisi tinggi kurva sigmoid sering dijumpai untuk menkaitkan makanan tanaman terhadap hasilnya. Kurva Sigmoid dapat dibangun dari (2.7) dalam bentuk dimana a_1 adalah slope pada $x = 0$ dan b adalah nilai $x < 1$ yang mana piecewise-linear berubah sloponya secara asimptotis. Berikut ini persamaan yang berhubungan dengan $a_1, b_1, a_2, b_2, dan, b$

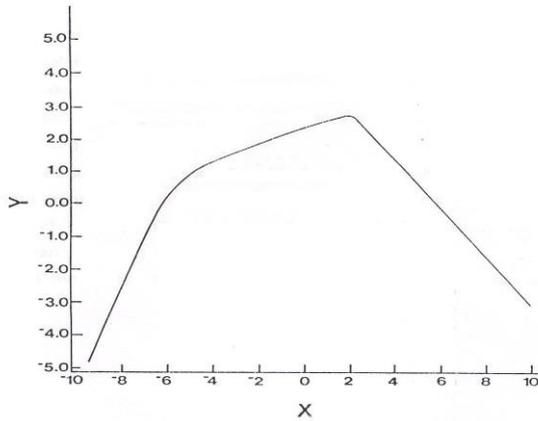
$$b_2 = \frac{1 - a_1 b}{b - 1} \tag{3.7}$$

Gambar 4 memperlihatkan tiga kurva sigmoid dengan limit piecewise-linear $y = 1$ untuk $1 \leq x$. Untuk ketiga kurva piecewise-linear mendekati fungsi untuk $x \leq 1$ terdiri dari garis yang

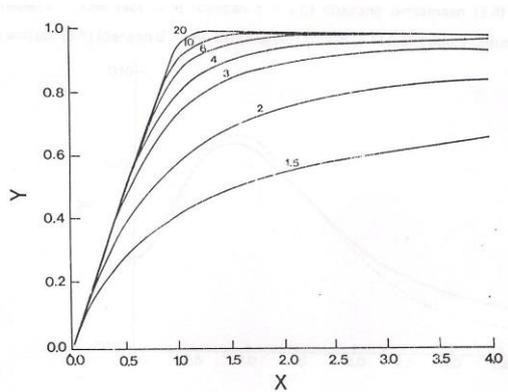
menghubungkan $(0, 0)$ ke (b, a_1b) , dan (b, a_1b) ke $(1, 1)$. Secara umum menggunakan (3.5) sebagai fungsi respons membutuhkan taksiran enam parameter.

Untuk mengilustrasikan fleksibilitas dari (2.7), tiga potong kurva dengan kondisi syarat batas disarankan dengan (2.1) ke (2.3) ditunjukkan pada Gambar 5 yang diplot dari fungsi

$$y = 8 + 0,5x - 0,75 \{(x + 6)^2 + 1\}^{\frac{1}{2}} - 0,5\{(x - 2)^2 + 0,1\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

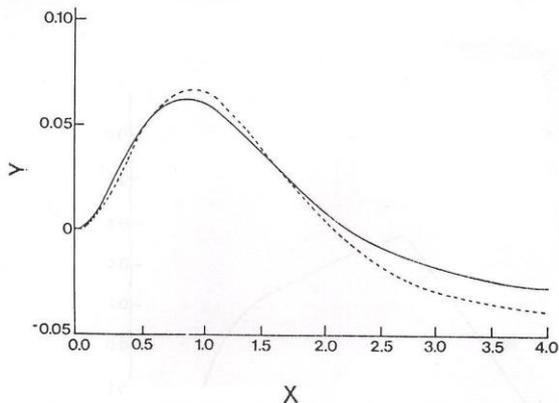


Gambar 2 : Hasil plot persamaan (3.3) dengan d sebagai parameter



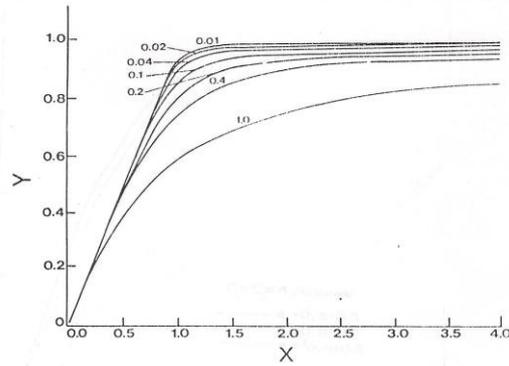
Pencocokan Kurva - Teguh Yuniarko

Gambar 3 : Hasil plot (3.1) (dengan $c = 2,6$) dikurang persamaan (3.4) (garis tebal) dan persamaan (3.3) (dengan $d = 0,6$) dikurang persamaan (3.4) (garis putus-putus)

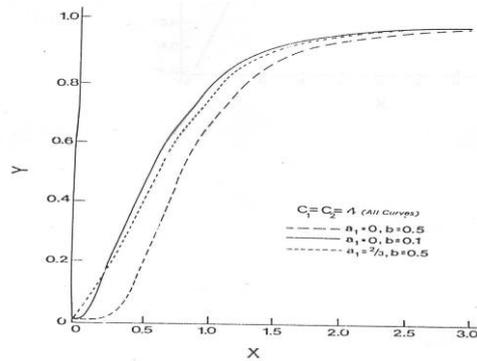


Pencocokan Kurva - Teguh Yuniarko

Gambar 4 : Hasil plot persamaan (3.5) untuk tiga kombinasi parameter. Semua garis adalah sigmoid, dua diantaranya mempunyai slop 0 pada $x = 0$



Gambar 5 : Hasil plot (3.8), mengilustrasikan sebuah kurva dengan tiga daerah linier yang berbeda dan dua daerah transisi menyebar sebab d_1 [persamaan (2.7)] mempunyai nilai 1, bersamaan dengan itu daerah transisi sebelah kanan terlihat jarang karena d_2 mempunyai nilai 0,1.



4. SIMPULAN

Variasi keluarga kurva yang dibangun oleh (2.7), secara parsial disajikan didalam Gambar 1 sampai 5, mewakili spectrum luas dari fungsi respon yang mungkin. Bila informasi presisi akan ditambahkan atau dari spectrum kurva, menjadi tersedia, tidak perlu menghilangkan model fungsi yang sebelumnya, termasuk menambahkan parameter atau menambahkan suku-suku didalam model. Inilah salah satu keuntungan dari sajian bentuk (2.7). Sebagai contoh, persamaan (3.8) yang diplot pada Gambar 5.. Jika untuk suatu alasan tertentu data hanya tersedia untuk $x \leq 0$, maka data tersebut akan dicocokkan kedalam bentuk model (3.8), tapi dengan hanya tiga suku pertama yang diikutkan. Persamaannya akan menjadi

$$y = 7 + x - 0,75\{(x + 6)^2 + 1\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

Jika data yang ada terplot didalam region $x > 0$ maka akan terlihat bahwa model (4.1) tidak cukup memadai. Satu atau lebih suku akan ditambahkan

pada model sehingga akan menghasilkan model (3.8). Beberapa nilai parameter akan mengalami perubahan dari (4.1) ke (3.8) tapi bentuk aljabarnya akan tetap sama. Bentuk (2.7) adalah similar dengan fungsi polynomial, yang dapat mempunyai sembarang parameter dengan tetap mempertahankan bentuk aljabarnya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anderson, R. L, and Nelson, L. A, (1995), "A family of models involving intersecting straight lines and concomitant experimental designs useful in evaluating response to fertilizer nutrients". *Biometrics* 303 – 318
- [2] Dilon, J. L, (1997), "*The Analysis of Response in Crop and Liverstock Pruduction*". 2nd ed, New York : Pergamon
- [3] Mercer, L. P, (1990), "Mathematical models in nutrition ". *Nutrition Reports, International* 189 - 198